

1. Το ολοκλήρωμα,  $I_c = \int_0^4 \int_0^2 (y - c)^2 dy dx$ , περιγράφει ροπή αδράνειας χωρίου σταθερής πυκνότητας.

(α) Να περιγράψετε το χωρίο και να εξηγήσετε σε τι αντιστοιχεί η σταθερά  $c$ . [0.5]

(β) Να βρείτε τη σταθερά  $c$  που ελαχιστοποιεί τη ροπή αδράνειας  $I_c$ . [1.5]

2. (α) Έστω  $\vec{F}$  ένα διανυσματικό πεδίο δυνάμεων. Να δείξετε ότι για κάθε κλειστή διαδρομή  $W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  αν και μόνο αν το πεδίο  $\vec{F}$  είναι συντηρητικό. [1]

(β) Θεωρήστε  $\vec{F} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$  ένα πεδίο δυνάμεων με σταθερές συνιστώσες  $x_0, y_0, z_0$ . Να δείξετε ότι το έργο κατά μήκος μιας τυχαίας (οποιασδήποτε) διαδρομής από σημείο  $A$  στο σημείο  $B$  είναι  $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ . [1]

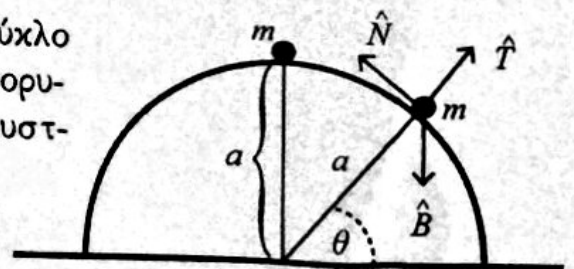
3. Έστω το συναρτησοειδές:  $J[x] = \int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt$ , όπου  $x \in C^2[a, b]$  και  $\dot{x} = dx/dt$ . Ορίζουμε μια συνάρτηση  $\eta(t)$  τέτοια ώστε οι μεταβολές της συνάρτησης  $x = x(t)$  να περιγράφονται ως:  $x(\alpha, t) = x(0, t) + \alpha\eta(t)$ .

(α) Να δείξετε ότι το  $J[x]$  παρουσιάζει ακρότατο όταν:  $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$ . [1]

(β) Αν η συνάρτηση  $L$  αντιστοιχεί στη συνάρτηση Lagrange ενός μονοδιάστατου συστήματος, να δείξετε ότι το αποτέλεσμά σας είναι ισοδύναμο με τη διατήρηση της ενέργειας. [1]

(γ) Να δείξετε ότι αν  $L(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ , όπου  $x \in C^4[a, b]$  τότε το  $J[x]$  παρουσιάζει ακρότατο όταν:  $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = 0$ . [2]

4. Ένα υλικό σημείο μάζας  $m$  εκτελεί κίνηση πάνω σε κύκλο ακτίνας  $a$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  βρίσκεται στην κορυφή του κύκλου (όπως στο σχήμα) και αφήνεται να γλιστρήσει πάνω στη περιφέρειά του.



(α) Να ορίσετε και να υπολογίσετε τα διανύσματα  $\hat{T}, \hat{B}, \hat{N}$  και να γράψετε τις συνιστώσες της ταχύτητας στο νέο σύστημα συντεταγμένων. [1]

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση Lagrange του συστήματος και να βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. [1.5]

(γ) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο το υλικό σημείο εγκαταλείπει τον κύκλο καθώς και η ταχύτητά του στο σημείο αυτό. [1.5]